



# Numerische Näherungsverfahren von Quadratwurzeln

**Ziel:** Die Näherung des Werts einer Quadratwurzel mit einer rekursiven Sequenz, indem ein kleines Programm geschrieben wird.

**Schlüsselbegriffe:** Serien, Rekursion, Programm, Quadratwurzel.

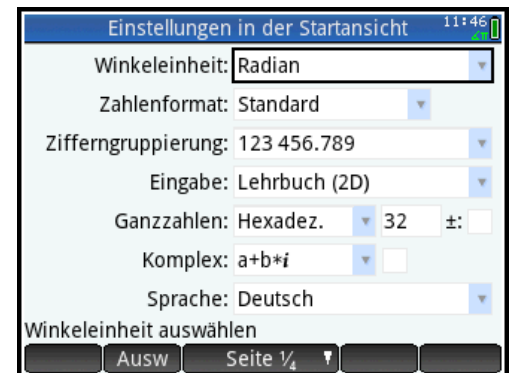
Alles über HP Prime:  
<http://www.hp-prime.de>

Verfahren: Wenn die Quadratwurzel einer Zahl  $P$  berechnet werden muss, wählen Sie dann einen Ausgangswert (eine Zahl, die Ihrer Meinung nach nahe am Ergebnis liegt), und teilen Sie die Zahl  $P$  durch diesen Ausgangswert. Wenn der Ausgangswert identisch ist mit der Quadratwurzel  $P$ , dann ist das Ergebnis identisch mit dem Ausgangswert und sind Sie fertig. Sie lagen also sofort richtig. Es ist jedoch keinesfalls so, dass der Ausgangswert jedes Mal exakt der Quadratwurzel entspricht. Als Beispiel nehmen wir  $P = 100$ ; wenn als Ausgangswert - einigermaßen geschätzt - 50 gewählt wird, dann ist das Ergebnis von  $P$  geteilt durch den Ausgangswert gleich 2, also nicht identisch mit dem Ausgangswert. Hier ist der Ausgangswert nicht identisch mit der Quadratwurzel. Sie sehen auch direkt, dass 50 zu groß und 2 (demzufolge) zu klein ist. Demnach liegt der tatsächliche Wert der Quadratwurzel zwischen 2 und 50. Wenn Sie den Mittelwert von 2 und 50 als neuen Ausgangswert eingeben, ist das schon mal eine Verbesserung.

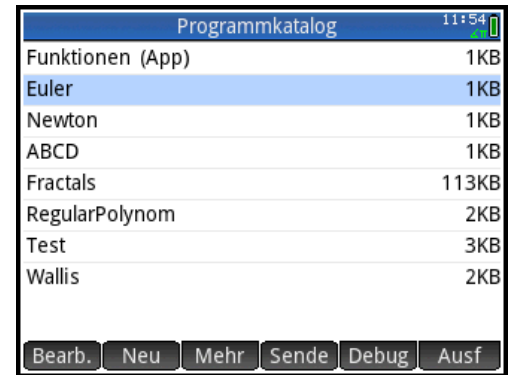
$$(2+50)/2=26$$

Wir führen die Berechnung nochmals aus, nun aber mit dem Ausgangswert 26. Sie denken vielleicht, dass man sehr lange damit beschäftigt ist, aber in den meisten Fällen kann eine derartige Näherung schnell durchgeführt werden.

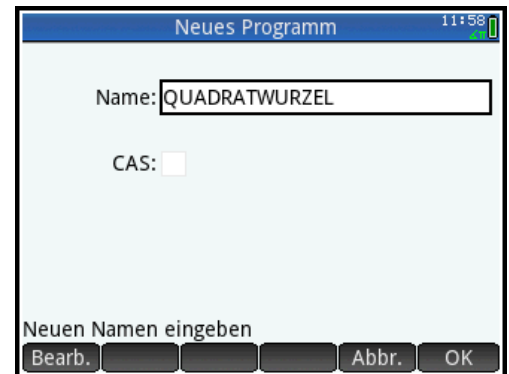
**Einstellungen:** Wählen Sie eine Zahlengruppierung mit Dezimalpunkt, sodass die Bildschirme auf dem Taschenrechner mit den Abbildungen in diesem Dokument übereinstimmen.



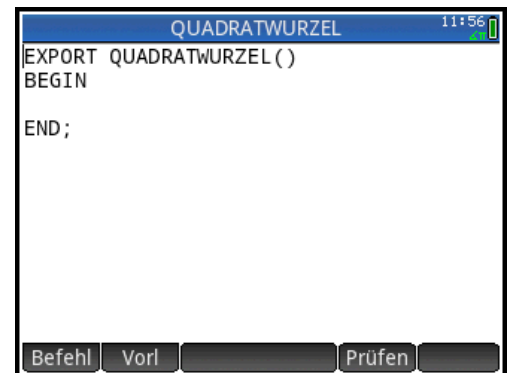
**Ausführung:** Wählen Sie **Shift** und **1** (Program y), um den Programm katalog zu öffnen. Je nach den Programmen, die bereits auf Ihrem Taschenrechner installiert waren, kann sich Ihr Bildschirm von dem hier angezeigten unterscheiden.



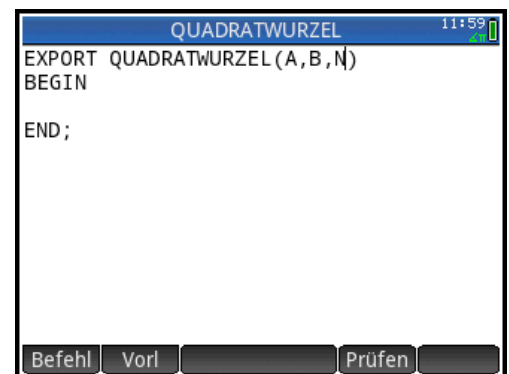
Benutzen Sie **alpha**, um den Programm editor für ein neues Programm zu starten, und **ALPHA** **alpha**, wonach Sie den Namen in Großbuchstaben eingeben können. Wählen Sie zum Beispiel „SQROOT“ als Name Ihres Programms. Beenden Sie das Eingeben von Buchstaben mit einem weiteren **ALPHA** **alpha**.



Bestätigen Sie mit **Enter**. Der Editor-Bildschirm zur Eingabe eines Programms wird geöffnet. Die Eröffnungs- und Schlusszeile sind bereits sichtbar. Der Programmtext kann dazwischen eingegeben werden.



Geben Sie zwischen die Klammern hinter EXPORT die zu verwendenden Variablen ein: A, B und N. A ist die Zahl, deren Quadratwurzel berechnet werden soll, B ist der Ausgangswert und N ist die Anzahl der Iterationen zur Berechnung der Näherung der Quadratwurzel.



Setzen Sie den Cursor auf die leere Zeile unter BEGIN; wählen Sie **Vorl** Option 4 Variable und 1 LOCAL. Bestätigen Sie mit **Enter**. Nun wird der LOCAL-Befehl in die leere Programmzeile geklebt, gefolgt vom Cursor und einem Semikolon.

Geben Sie I ein (indem Sie **ALPHA** und **TAN** benutzen) und achten Sie auf das Semikolon am Ende dieser Zeile; dies wird zum Beenden der Zeile verwendet; alle Programmzeilen müssen mit einem Semikolon beendet werden.

Wenn Sie den Befehl LOCAL verwenden, wird die Variable I nur lokal innerhalb des Programms benutzt. Außerhalb des Programms wird die Variable I nicht beeinflusst. Die anderen Variablen, A, B und N sind automatisch LOCAL, wenn Sie auf der obersten Zeile des Programms eingegeben werden.

Bewegen Sie den Cursor auf die nächste (leere) Zeile und wählen Sie **Befehl**, danach Option 6 I/O (Input/Output) und Option 9 PRINT. Setzen Sie den Cursor hinter die Klammern und schließen Sie die Zeile wiederum ab mit einem Semikolon; **ALPHA** und **Ans**.

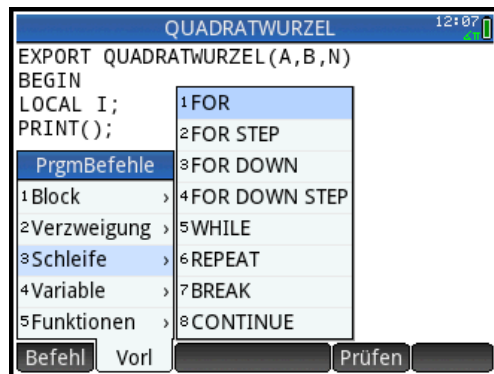
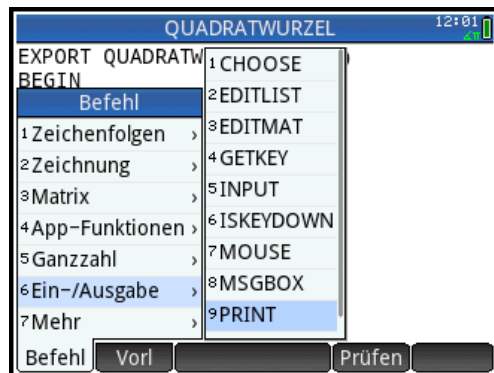
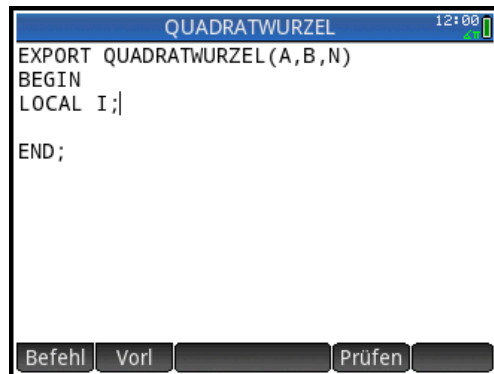
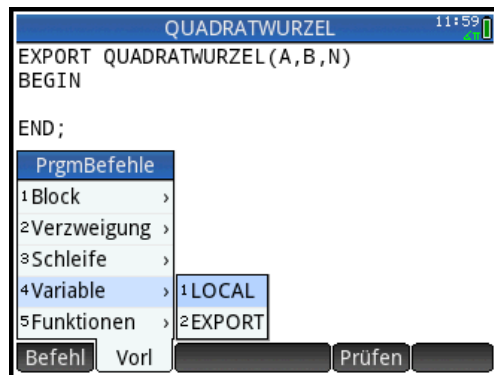
Benutzen Sie **Enter**, um die Eingabe zu bestätigen. Dadurch springt der Cursor automatisch zur nächsten leeren Zeile.

Die Eingabe des leeren PRINT-Befehls löscht das Terminal. Das Terminal ist das Fenster, auf dem alle Outputs des Programms erscheinen. Das Terminal kann auch von anderen Bereichen auf dem Rechner aus geöffnet werden, indem Sie **On** drücken und eingedrückt halten und **x<sub>i</sub> T** drücken (die Taste für den Buchstaben T).

Benutzen Sie nun **Vorl** Option 3. Loop und Option 1.

Dies öffnet die FOR-Vorlage, eine Schleife im Programm, die verschiedene Male wiederholt wird, (in diesem Fall) abhängig von der Variable N. In unserem Programm läuft die Variable I von 1 bis N. Für alle Werte von I werden Programmzeilen gestartet. Wenn Sie den Wert für N eingeben, entscheiden Sie selbst, wie viele Sequenzen laufen sollen.

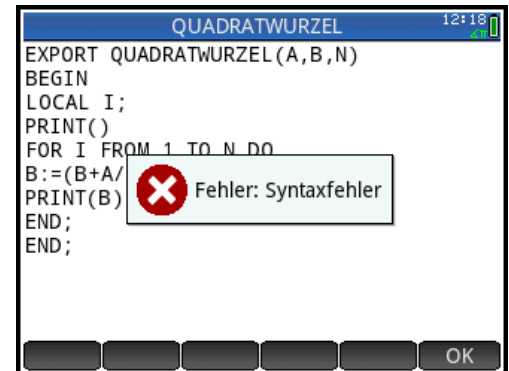
Sie sehen nun Textstücke, die Leerstellen enthalten; die Vorlage für den FOR-Befehl. Fügen Sie an den Leerstellen bitte die Eingaben aus dem rechten Fenster ein.



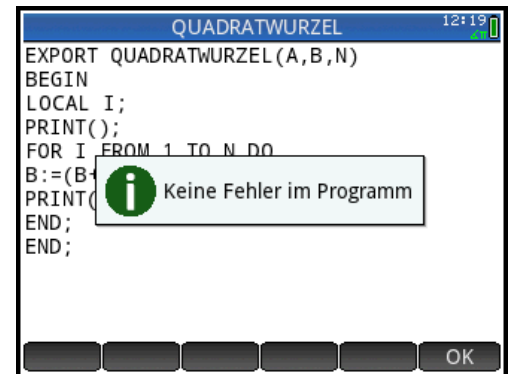
Tippen Sie in die erste Leerstelle die Variable I. Diese Variable beginnt bei 1 und nimmt in Schritten von 1 zu, bis N. Bei jedem Schritt werden die Zeilen innerhalb der Vorlage ausgeführt. In der ersten Zeile wird der neue Wert von B berechnet als Mittelwert des (alten) Werts von B und des Werts von A, geteilt durch den Wert der (alten) Variable B. In der nächsten Zeile wird der neu berechnete Wert von B im Terminal angezeigt. Der Befehl „END;“ in der nächsten Zeile beendet den Teil, der innerhalb der FOR-Vorlage wiederholt ausgeführt werden muss.

Damit ist das Programm bereits abgeschlossen; nur die leere Zeile zwischen den beiden END-Befehlen kann gelöscht werden.

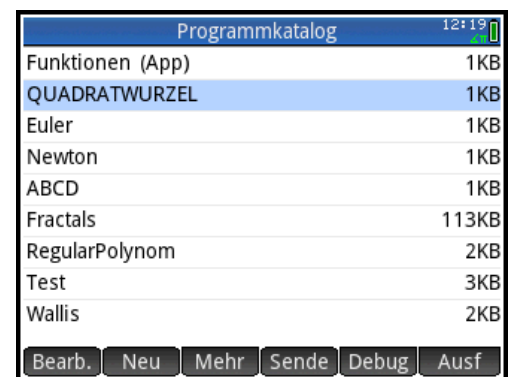
Mit dem **Prüfen** Knopf können Sie einen Test auf Syntax-Fehler durchführen. Benutzen Sie den Knopf, um zu prüfen, ob Sie Fehler gemacht haben. Als Beispiel lösche ich das Semikolon in der Zeile mit dem leeren PRINT()-Befehl. Ein Fehler wie im rechts angezeigten Bildschirm erscheint. Klicken Sie auf **OK**, und der Cursor springt auf die Zeile, die den Fehler enthält (oder sehr nahe am Fehler).



Beheben Sie den Fehler und drücken Sie nochmals auf **Cntrl.**. Wenn alles stimmt, sehen Sie den rechts angezeigten Bildschirm. Bestätigen Sie mit **OK**.



Wählen Sie **Esc**, um den Programm-Editor zu verlassen und das Programm zu starten mit **Ausf**.

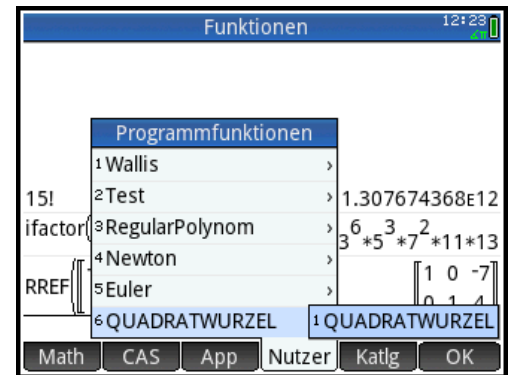


Die Programmzeile EXPORT(A,B,N); öffnet automatisch ein Dialogfenster, in das die Werte für die drei Variablen eingegeben werden können. Wählen Sie als Beispiel A=49, (damit kann das Programm einfach getestet werden, denn wir wissen alle, dass  $\sqrt{49}=7$ ) und einen Ausgangswert von B=1 (keine gute Schätzung, aber ein schöner Wert für diesen Test) und N=8 für die Anzahl der Schritte. Wählen Sie zum Ausführen **OK**.

```

Terminal 12:28
25
13.48
8.5575074184
7.1417369124
7.00140647525
7.00000014125
7
7
  
```

Hier sehen Sie das Terminal mit dem Output. Versuchen Sie es einfach mit ein paar unterschiedlichen Ausgangswerten, und Sie werden sehen, dass dabei in vielen Fällen bereits ein ordentliches Ergebnis herauskommt.

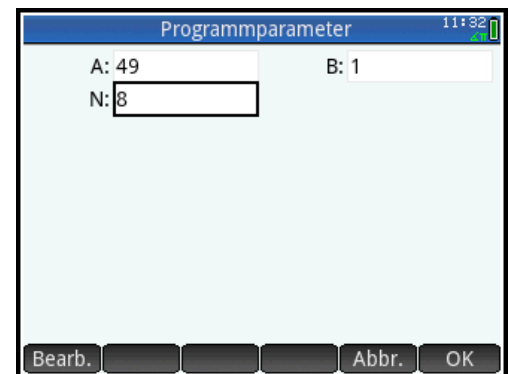


Sie können das Programm auch von der Toolbox im Home-Bildschirm aus starten. Öffnen Sie den Home-Bildschirm mit **Settings** und drücken Sie **Mem B**. Je nach dem Menü, das Sie beim letzten Mal benutzt haben, wird eines der Menüs von der Unterseite des Bildschirms geöffnet. Wählen Sie den Button **Nutzer** und wählen Sie die Option Quadratwurzel. Wie Sie merken, muss diese Option doppelt gewählt werden.

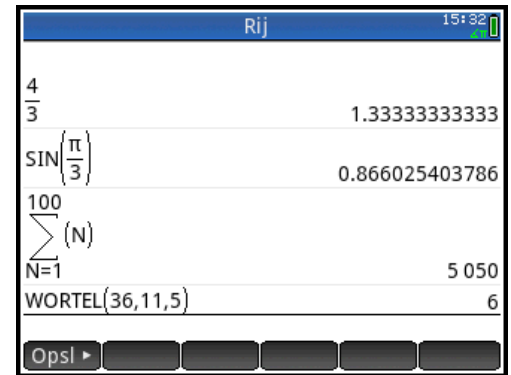
```

Terminal 12:24
7.13636363635
6.0904748118
6.00067200765
6.00000003765
6
  
```

In der Eingabezeile sehen Sie nun Quadratwurzel(), wobei der Cursor zwischen den Klammern steht und blinkt. Geben Sie drei Zahlen ein. Wählen Sie zum Beispiel 36, 11 und 5, jeweils getrennt durch ein Komma, und drücken Sie auf **Enter**, um die Berechnung zu starten. Daraufhin öffnet sich das Terminal und sehen Sie die 5 Schritte sowie die Näherung der Quadratwurzel von 36 mit einem Ausgangswert von 11. Das ist zufällig auch genau die Anzahl der Schritte, die für das richtige Ergebnis benötigt werden.



Drücken Sie eine beliebige Taste, um das Terminal zu verlassen. Sie sehen dann in der Geschichte auf dem Home-Bildschirm den Befehl mit dem zuletzt berechneten Wert für die (Näherung der) Quadratwurzel von 36.

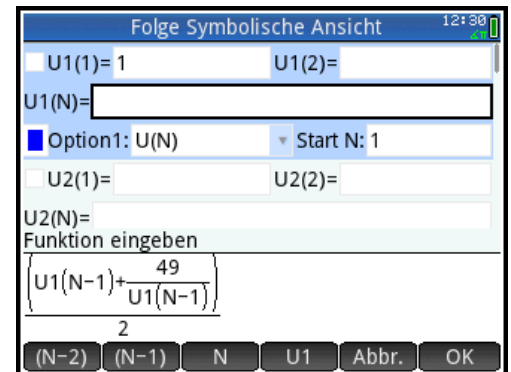


Dieses rekursive Verfahren kann auch mit dem Sequence-Programm auf dem HP Prime dargestellt werden. Wählen Sie **Apps Info**, um die Programmbibliothek zu öffnen, und wählen Sie das Sequence-Programm.



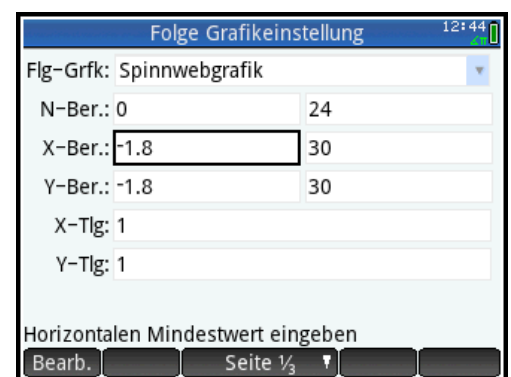
Wenn Sie die aktuellen Daten im Programm speichern möchten, öffnen Sie die Bibliothek und wählen Sie **Spei**. Geben Sie nun einen geeigneten Namen ein, öffnen Sie nochmals die Folge Anwendung und löschen Sie alle Daten mit **Shift** und **Esc**.


Geben Sie den Ausgangswert 1 ein als U1(1) und setzen Sie den Cursor in das Feld für die Bestimmung von U1(N). Geben Sie die Formel ein, wie sie auf dem rechten Bildschirm angezeigt wird. Auf der Unterseite des Bildschirms sehen Sie die Begriffe U1 und (N-1); verwenden Sie diese Begriffe, um die Eingabe zu erleichtern.



Bestätigen Sie mit **Enter** oder **OK**.

Um geeignete Werte für die X- und Y-Achsen zu wählen, benutzen Sie **Shift** und **Plot Setup**. Benutzen Sie die Option Cobweb und die Werte, wie sie in den Feldern auf dem rechten Bildschirm angezeigt werden.





Schauen Sie sich nun die Grafik an mithilfe von . Hierdurch erkennen Sie vielleicht, warum diese Art von Grafik Cobweb (Spinnennetz) genannt wird. Die Grafik beginnt beim blauen Punkt an der linken unteren Seite der Linie  $Y=X$ . Sowohl  $X$  als auch  $Y$  haben den Wert 1. Danach wird  $U1(2)$  berechnet, mit dem Ergebnis 25; die blaue Linie steigt bis  $Y=25$ . An diesem Punkt bewegt sich die Linie in Richtung der Linie  $X=Y$ . Der berechnete Wert von 25 dient nun als Input-Wert für die nächste Berechnung. Wenn  $X=25$  der Input ist, beträgt der Output 13,48. Die blaue Linie läuft nach unten, und zwar in Richtung dieses  $Y$ -Werts, und seitwärts in Richtung von  $Y=X$ . Mit einem Input von 13,48 wird der nächste Wert berechnet, usw. usw. Nach 7 Berechnungen ist die Quadratwurzel bereits ziemlich genau berechnet. Indem Sie den Ausgangswert im Symbol-Bildschirm ändern (sie finden diesen hinter  $U1(1)=$ ), können Sie für diese Berechnung sehr unterschiedliche Ausgangswerte ausprobieren.

Mithilfe dieses Verfahrens haben wir eine numerische Näherung einer Quadratwurzel erreicht. Die Anpassungen für eine Kubikwurzel sind sehr einfach.

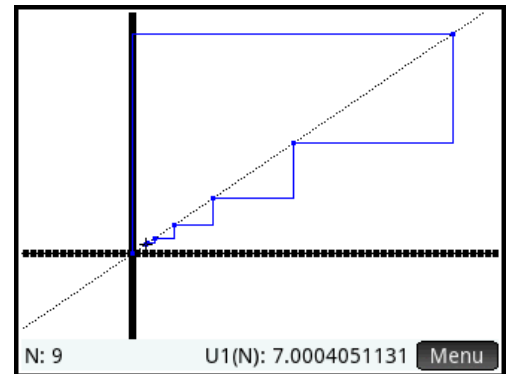
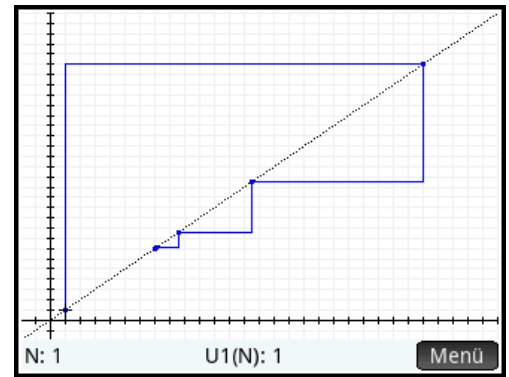
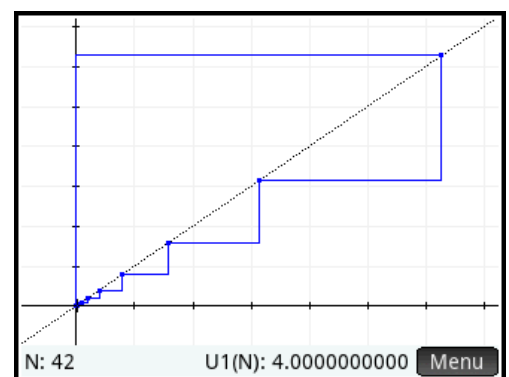
## Kubikwurzeln

Wir beginnen mit der Berechnung von Kubikwurzeln in die Folge Anwendung; öffnen Sie die symbolische Anzeige und setzen Sie den Cursor auf das Eingabefeld hinter  $U1(N)=$

Wählen Sie  und ändern Sie die Bestimmung von  $U1(N)$ , wie im rechten Bildschirm angezeigt. Es bedarf vielleicht etwas Übung, um den Cursor in die verschiedenen Niveaus der Gleichung zu setzen. Verändern Sie 49 in 64 und quadrieren Sie den Divisor  $U1(N-1)$ . Setzen Sie den Cursor hinter  $U1(N-1)$  und betätigen Sie die Taste .

Der Unterschied zur Näherung der Quadratwurzel besteht darin, dass die Zahl, deren Kubikwurzel wir berechnen möchten, durch das Quadrat des Ausgangswerts geteilt wird. Wenn der Ausgangswert die Kubikwurzel ist, haben wir sofort das richtige Ergebnis. Wenn der Ausgangswert nicht richtig ist, benutzen wir wiederum den Mittelwert der beiden Zahlen: die eine ist zu groß, und die andere ist zu klein. Demzufolge verbessern wir den Ausgangswert mit jedem einzelnen Schritt.

Das Verfahren verläuft nicht so schnell wie bei der Näherung der Quadratwurzel. Die Berechnung der Kubikwurzel von 64 (=4, da  $4*4 = 16$  und  $4*16=64$ ) erfordert fast 40 Schritte, bevor das Programm zum Ergebnis 4 ohne Dezimalstellen kommt.

Das Programm kann wiederum einfach angepasst werden. Öffnen Sie das Programm mithilfe von **Shift**, **F1** (Program), gehen Sie in der Programmliste auf SQROOT und wählen Sie **Bearb.**. Setzen Sie den Cursor an den Anfang der Zeile mit dem LOCAL-Befehl und benutzen Sie **Shift** und **F2** (View Copy). Tippen Sie auf **Anfang** und bewegen Sie den Cursor an das Ende der vorletzten Zeile. Drücken Sie **Ende**. Nun Sie den Teil des Programmtextes markiert haben, der kopiert werden soll, wählen Sie **Kopie**.

```

EXPORT Quadratwurzel(A,B,N)
BEGIN
LOCAL I;
PRINT();
FOR I FROM 1 TO N DO
B:=(B+A/B)/2;
PRINT(B);
END;
END;

```

Verlassen Sie dieses Programm mithilfe von **Esc** (Clear) und tippen Sie auf **Neu**, um ein neues Programm zu schreiben. Nennen Sie dieses Programm QUBIKWURZEL, benutzen Sie **ALPHA** (alpha), **ALPHA** (alpha), um Großbuchstaben einzugeben, und beenden Sie die Eingabe mit einem weiteren **ALPHA** (alpha). Wählen Sie **OK**. Nun können Sie den Programmtext eingeben. Setzen Sie den Cursor in die Zeile unter BEGIN und benutzen Sie **Shift** und **F2** (Menu Paste), um die vorher kopierten Zeilen in das Programm zu setzen. Die erste Zeile des Popup-Bildschirms enthält die Programmzeilen, die in diesem Fall benötigt werden. Bestätigen Sie mit **Enter**.

```

EXPORT Qubik(A,B,N)
BEGIN
LOCAL I;
PRINT();
FOR I FROM 1 TO N DO
B:=(B+A/B^2)/2;
PRINT(B);
END;
END;

```

Es wurden nur zwei kleine Anpassungen benötigt:

1. Geben Sie auf der obersten Zeile die Variablen zwischen die Klammern ein: A,B,N
2. Ändern Sie die Zeile B:=(B+A/B)/2;

in B:=(B+A/B<sup>2</sup>)/2, setzen Sie den Cursor lediglich an die richtige Stelle und betätigen Sie **x<sup>2</sup>**. Das Programm KUBIKWURZEL ist fertig; testen Sie es aus!

**Anmerkung:** Die Bearbeitung von Programmen kann auch an einem PC oder Mac vorgenommen werden. Downloaden und installieren Sie dafür das HP Connectivity Kit und den HP Prime Emulator (beide sind kostenlos) und benutzen Sie die Tastatur Ihres Computers, um Programme zu schreiben oder zu ändern.

- Pieter Schadron, April 2017